

中山大学硕士学位论文

人脸特征提取与人脸识别的一种新方法： 逆Fisher判别分析

申请人姓名： 庄晓生

指导老师姓名： 戴道清 教授

申请学位级别： 硕士

专业名称： 应用数学

答辩委员会

主席：

委员：

二零零五年六月

人脸特征提取与人脸识别的一种新方法： 逆 Fisher 判别分析

专 业：应用数学

硕士生：庄晓生

导 师：戴道清 教授

摘要

人脸识别是模式识别领域的一个重要研究课题。而“PCA+LDA”的两步骤方法是一种非常著名的，用于高维空间及处理奇异情况的方法。通过对这个两步骤方法的理论与应用的研究，本文指出，应用“PCA+LDA”方法有其本身的理论缺陷，通过一个简单的例子，本文说明了，在某种情况下，经过 PCA 步骤将维数不管降至多低，都无法保证在 LDA 中，类内差异矩阵的非奇异性，从而导致了 LDA 的应用失败。对此，本文提出一个新的判别准则：“逆 Fisher 判别准则”，并据此提出了一种新的判别分析方法：逆 Fisher 判别分析方法。另外，通过在 PCA 过程中加入与类别有关的特征选择规则，并结合逆 Fisher 判别分析方法，本文得出一种新的两步骤框架：“带特征选择的 PCA”+“逆 Fisher 判别分析”。最后，本文实现了新方法的算法，并通过实验说明了这个新方法的有效性以及比原来 Fisher 脸方法的优越性。另外，本文的方法甚至可以应用在每类训练样本数为 1 的情况下。

关键词：线性判别分析，逆 Fisher 判别分析，主成分分析，小样本问题，特征选择，人脸识别

Inverse Fisher Discriminate Analysis for Face Feature Extraction and Recognition

Major: Applied Mathematics

Name: ZHUANG Xiaosheng

Supervisor: Professor Dao-Qing Dai

Abstract

PCA plus LDA is a famous two-pharse framework for linear discriminant analysis in high dimensional space and singular cases. In this paper, by examining the theory of this two-pharse framework, the deficiency of this framework is pointed out with an example showing that LDA procedure might fail even after PCA procedure when applying to small sample size problem. For this reason, a new two-pharse framework is developed by introducing an inverse Fisher criterion and adding a restriction in PCA procedure. Based on this new framework, the singularity phenomenon will never occur, thereby guaranteeing the success in real-world application. Experiment results suggest that this new approach works well and can be applied even in the case that the training sample size is equal to one.

Keywords: Linear Discriminant Analysis, Inverse Fisher Discriminant Analysis, Principle Component Analysis, Small Sample Size Problem, Feature Extraction, Face Recognition

目录

摘要	I
Abstract	II
目录	III
第 1 章 引论	1
1.1 人脸识别——其历史与应用背景	1
1.2 人脸识别——主要方法简介	1
1.3 本文方法简介	3
1.4 本文主要结构	4
第 2 章 PCA+LDA的理论基础及其缺陷	5
2.1 PCA理论简介	5
2.2 LDA理论简介	8
2.3 PCA+LDA方法及其缺陷	10
第 3 章 本文方法:逆Fisher判别分析	14
3.1 本文的理论基础—— S_t , S_b , S_w 及其零空间	14
3.2 Fisher准则及逆Fisher准则	18
3.3 带特征选择的主成分分析——PCA with Selection	21
3.4 带特征选择的主成分分析与逆Fisher判别分析——PCA_S+IFDA	23
3.5 算法描述	28
3.6 算法复杂度估计	30
第 4 章 实验结果	31
4.1 IFFace方法的性能	33
4.2 IFFace方法与FisherFace方法比较	36
第 5 章 总结与展望	40
参考文献	42
致谢	46
论文原创性声明	47

第 1 章 引论

1.1 人脸识别——其历史与应用背景

人脸自动识别技术就是利用计算机分析人脸图像，从中提取有效的识别信息，用来辨认身份的一门技术。它涉及到模式识别、图像处理、计算机视觉、生理学、心理学及认知学等诸多学科的知识，并与基于其它生物特征的身份鉴别方法以及计算机人机感知交互的研究领域都有密切联系。与指纹、视网膜、虹膜、基因、掌纹等其它人体生物特征识别系统相比，人脸识别系统更加直接、友好，其使用者无心理障碍。

人脸识别技术应用背景十分广泛，可用于公安系统刑侦破案的罪犯身份识别、身份证及驾驶执照等证件验证、银行及海关的监控、自动门卫系统、视频会议、机器人的智能化研究以及医学等方面。虽然人类可以毫不困难地根据人脸来辨别一个人，但利用计算机进行完全自动的人脸识别仍存在许多困难，这主要表现在：人脸是非刚体，存在表情变化；人脸随年龄增长而变化；发型、眼镜等装饰对人脸造成遮挡；人脸所成图像受成像机制影响。此外人脸识别技术与相关学科的发展及人脑的认识程度紧密相关。这诸多因素使人脸识别研究成为一项极富挑战性的课题[7] [28] [32] [33]。

1.2 人脸识别——主要方法简介

正因为人脸识别应用的广泛性与挑战性，人们提出了许许多多有关人脸识别的算法。另外关于人脸识别的理论也有了长足的发展，关于这方面的文章，可参考人脸识别的综述[7] [28]。

人脸识别的大多数算法及理论主要集中解决两个方面的问题：1) 如何提取特征以表示人脸；2) 对新的人脸用所得出的特征表示出来并进行识别分类[9]。事实上，特征提取是许多方法及理论中研究的重中之重。总的来说，这些方法与

理论的目的就是找出一种在较低维空间中具有较大判别能力的人脸特征表示技术。从目前来看，人脸识别技术中最为成功的都是直接将人脸看成一个二维(2-D)的整体图案来处理。这种处理方法的好处就是避免了对于三维(3-D)模型中的其它物体边界的检测[20]。

主成分分析(Principle Component Analysis, PCA)及线性判别分析(Linear Discriminant Analysis, LDA)是两种最主要的,广泛应用于人脸识别,数据降维及特征提取方法。很多著名的方法,如特征脸(EigenFaces)[21]及Fisher脸(FisherFaces)[2]都是基于这两种方法或者它们的变体。通常来说,在模式分类中,基于线性判别分析的算法要优于基于主成分分析的算法。原因在于线性判别分析集中于提取具有最优分类能力的低维特征来表示目标,而主成分分析方法却只着眼于对目标的简单低维重构。但严格来说,并不是所有的情况下,主成分分析方法的性能都比线性判别分析差[11]。另一方面,由于线性方法并不能很好地处理具有巨大视点变化的人脸模式上,因为这种模式通常会导致一种非凸的、复杂的分布。因此,在模式识别及机器学习领域中[14],人们提出了很多基于核(Kernel)的机器学习方法[18],譬如支持向量机(SVMs),基于核的主成分分析(KPCA),以及基于核的Fisher判别分析方法(KFDA)等等。

虽然线性判别分析方法有其本身的优点,但在实际应用中,基于线性判别分析的算法却面临一个困难的问题:“小样本问题”(Small Sample Size Problem, SSS Problem)[17]。小样本问题通常出现在高维的模式分类与识别中,在此种情况下,样本数目比样本本身所在的空间维数要低得多。而对基于核的方法,由于核本身的特点就是将低维空间向高维空间投影,因此,观察空间中许多经典的“大样本”问题,如数字识别等,都会转化为“小样本问题”。

既然小样本问题普遍存在,因此很有必要发展新的,更加有效的算法来处理这种情况。在有关Fisher判别分析方法的已有算法中[2][3][8][15][19][22][23][24][25][26][29],最有名的要算Fisher脸方法(FisherFaces)[2]。这种方法主要由两个步骤组成:PCA+LDA。它在人脸或图像应用中的优越性能是有目共睹的[19][2][10][28]。而且,最近关于这种方法的理论框架也已经提出来了[26][23]。

另一方面，人们也提出了一些能够减轻“小样本问题”的影响的正则方法[4] [5] [10] [16]，譬如Mika等人[12] [13]就建议在类内差异矩阵（Within-class Scatter Matrix）加上一个扰动矩阵的方法以使原来奇异的矩阵成为非奇异的矩阵，而Baudat与Anouar [1]则通过对类内差异矩阵进行QR分解并摒弃0特征值的方法来避免矩阵的奇异性。除此之外，研究者们还着力于寻找更有效的判别子空间来代替原来的空间。一个很有意义的发现就是，类内差异矩阵的零空间中存在非常重要的判别信息[3] [8] [23] [24] [25] [26] [27]。这种存在于类内差异零空间的判别信息称为：不规则信息，以区别于存在于类内差异矩阵零空间外的规则信息[22]。

不幸的是，许多上面的方法通常直接丢弃类内差异矩阵零空间中的信息，而这些信息对于判别，特别是“小样本问题”来说，恰恰是非常有用的。Chen等人在[3]中强调了这些不规则信息的重要性并提出一种较有效的办法提取这些信息，但他们却忽略了那些规则的信息。而Yu和Yang在[26]中将这两种信息都考虑进来，提出一种直接线性判别分析方法（Direct Linear Discriminant Analysis, DLDA）。这种方法从类间差异矩阵（Between-class Scatter Matrix）的值域中直接提取这些信息。由于类间差异矩阵的维数最多为 $K-1$ （ K 为类数），Yu和Yang的这种算法的复杂度为仅为 $O(K^3)$ ，因此这种方法对于“小样本问题”来说，效率是非常高的。然而直接线性判别分析方法也不是最优的，只是一种次优方法。Lu等人在[9]也考虑将两种信息考虑进来，并将DLDA推广至核方法，称为直接判别分析的核方法（Kernel Direct Discriminant Analysis, KDDA）。另一方面，Yang等人在[22]中发展了一种新的Fisher判别分析核方法：KPCA+LDA。称之为完全Fisher判别分析核方法（Complete Kernel Fisher Discriminant Analysis, CKFD）。在这种方法中，根据不同的准则提取出两类信息：规则与不规则信息，然后将这两种信息融合在一起用来判别。对比于其它方法，这种方法有较大的优点。

1.3 本文方法简介

通过研究PCA与LDA的理论以及“PCA+LDA”框架在模式分类与人脸识别等实际应用中的有效性，考虑到“PCA+LDA”在理论上的缺陷，以及不规则信息在判别分析中的巨大作用，本文提出了一种新的类似于“PCA+LDA”的框

架应用了人脸识别。这种新方法主要是对 PCA 过程进行了修改，加入了特征选取规则，同时提出一种新的 Fisher 判别准则并通过此准则导出规则与不规则信息。对此修改后的 PCA，称为“带特征选择的主成分分析（PCA with Selection, PCA_S）”；而新的 Fisher 判别准则称为“逆 Fisher 判别准则（Inverse Fisher Criterion）”，并称使用此准则的分析方法为“逆 Fisher 判别分析（Inverse Fisher Discriminant Analysis-IFDA）”。简言之，本文的方法可称为：“PCA_S+IFDA”。

1.4 本文主要结构

下面概括介绍本文内容。首先，由于本文提出的方法主要是基于 PCA 与 LDA 的，因此，在第 2 章中将扼要地概述 PCA 与 LDA 的理论，并通过一个简单的例子说明“PCA+LDA”框架的理论缺陷。基于此，在第 3 章中将详细介绍本文的新方法并对比此方法与“PCA+LDA”的相同与不同，除此之外，在此章后面，还会给出本新方法的算法描述及复杂度估计。在第 4 章，给出了一些关于本文方法的实验结果，验证了本新方法的可行性以及对比于旧方法的优越性。最后，第 5 章将对本文进行总结。

第 2 章 PCA+LDA 的理论基础及其缺陷

首先，本章将对 PCA 与 LDA 的理论进行简单扼要的介绍，PCA 及 LDA 是本文所提出新方法的基础，通过对此两个分析方法的了解与研究，才能在第 3 章中提出本文的新方法；其次，将介绍“PCA+LDA”方法的特点以及其在实际应用中可能遇到的困难；最后，通过一个例子说明了无论使用 PCA 将训练样本的维数降至多少，降维后类内差异矩阵的逆都不存在，因此表明“PCA+LDA”确实会失败。为了叙述的方便，下面将介绍一下本文考虑处理的问题： K 类人脸识别问题。

假设人脸有 K 类，标以 G_1, G_2, \dots, G_K ，为了进行人脸识别，从这 K 类中随机取出 $n_j, j=1, 2, \dots, K$ ，个样本如下：

$$\begin{aligned} G_1 : & \mathbf{X}_1^{(1)} \quad \mathbf{X}_2^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{n_1}^{(1)} \\ G_2 : & \mathbf{X}_1^{(2)} \quad \mathbf{X}_2^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{n_2}^{(2)} \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ G_K : & \mathbf{X}_1^{(K)} \quad \mathbf{X}_2^{(K)} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{n_K}^{(K)} \end{aligned}$$

一般来说， $\mathbf{X}_i^{(j)}$ 表示长与宽分别为 w 与 h 的人脸矩阵转化为 $d \times 1$ 的向量 ($d = w \times h$)。

2.1 PCA 理论简介

对人脸识别来说， d 通常是非常大的，即使对于一幅分辨率只有 64×64 的人脸， d 就已经达到了 4096，如果直接对样本矩阵进行操作，将会遇到两个方面的困难。一方面是对计算机内存存储量的海量要求，另一方面是对计算机 CPU

计算速度的快速要求。一般情况下，这两个方面的要求都很难达到。因此，非常有必要先对样本进行降维。关于降维的方法目前有多种多样，其中最著名的方法要算主成分分析（PCA）。

PCA 是一种广泛应用于图像处理，人脸识别，统计应用中的方法。主成分分析所着重的是如何转换原始变量使之成为一些互相独立的线性组合变量，而且经由线性组合而得的主成分仍保有原变量最多的信息，其关键在“变异数”问题，利用求特征值及特征向量之方法，过滤出占最大变异数的成分，此即为主要成分。主成分分析的目的在于概述变量间的关系，它可将原来变数转换成新的没有相关的变数，可用来简化多变量资料的维度，即降低变量个数，但亦会丧失部分信息可解决回归分析里共线性问题。

PCA在人脸识别的应用方法，通常称为特征脸方法（EigenFace）[21]，主要基于K-L 变换。更详细地说，对于 K 类人脸问题，首先将 $N(N = \sum_{i=1}^K n_i)$ 个样本排列成一个 $d \times N$ 的矩阵 X ，即

$$\begin{aligned} X &= (\mathbf{X}_1^{(1)}, \mathbf{X}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{X}_{n_1}^{(1)}, \mathbf{X}_1^{(2)}, \mathbf{X}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{X}_{n_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}_1^{(K)}, \mathbf{X}_2^{(K)}, \dots, \mathbf{X}_{n_K}^{(K)}) \\ &= (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N) \end{aligned}$$

设 $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ ，即 μ 为其训练样本的总体均值，算出 μ 后，可以令

$\tilde{X} = (X_1 - \mu, X_2 - \mu, \dots, X_N - \mu)$ ，即 \tilde{X} 为 X 的中心化矩阵。据此，我们可以定义总差异矩阵（Total Scatter Matrix） S_t 如下：

$$\begin{aligned} S_t &= \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)(X_i - \mu)^T \\ &= \tilde{X}\tilde{X}^T \end{aligned}$$

对图像降维来说，应用 PCA 的目的就是找到一个线性变换，或者称为投影矩阵 $\mathbf{W}_{\text{PCA}} \in \mathfrak{R}^{d \times d'}$ 将原来 d 维的训练图像样本空间投影到 d' 维的样本特征空间

($d' < d$)，并且使得投影后的训练样本对应的总差异矩阵的行列式最大，即

$$\begin{aligned} W_{\text{PCA}} &= \arg \max_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} |W^T S_t W| \\ &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{d'}] \end{aligned} \quad (2-1)$$

其中， $\{w_i | i=1,2,\dots,d'\}$ 为 S_t 中对应于前面 d' 个最大特征值的维数为 $d \times 1$ 的特征向量。

由 S_t 的定义，我们知道 S_t 是一个 $d \times d$ 的矩阵，而 d 往往很大，因此，如果直接求总差异矩阵 S_t 的特征值与特征向量，几乎是不可能的。但是，注意到 S_t 是一个由中心化样本矩阵与其本身转置的乘积得到的实对称矩阵，因此我们可以应用奇异值分解理论得到我们要求的特征值与特征向量。

奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD) 是矩阵分析中正规矩阵酉对角化的推广。设矩阵 A 是 $m \times n$ 的秩为 r ，它的奇异值是指 n 阶方阵 $A^T A$ (或 m 阶方阵 AA^T) 的正特征值的平方根。奇异值分解是指如下形式的分解：

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T, \quad \text{其中 } U \text{ 和 } V \text{ 为酉矩阵, } \Delta = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}, \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

由于 AA^T 与 $A^T A$ 的特征值是一样的，由上面分解可得出它们的非零特征向量的关系：

$$U_i = \frac{1}{\sigma_i} A V_i, \quad i=1,2,\dots,r \quad (2-2)$$

其中 U_i ， V_i 分别对应于 U 与 V 的第 i 分量。

对于 S_t 而言，由于 $S_t = \tilde{X}\tilde{X}^T$ ，根据上面的 SVD 理论，我们不必直接求它的

特征值与特征向量，而只要求出 $\tilde{S}_i = \tilde{X}^T \tilde{X}$ 的非零特征值与对应特征向量，此处， \tilde{S}_i 是 $N \times N$ 矩阵，对人脸识别来说，通常 $N \ll d$ ，因此问题的规模将大大减小。然后根据两者的关系式 (2-2) 就可以求出所需要的特征向量及相应的投影矩阵 W_{PCA} 。最后，通过投影矩阵，我们可以得到新的样本特征：

$$Y_i = W_{PCA}^T X_i \in \mathfrak{R}^{d'}, i = 1, 2, \dots, N$$

在人脸识别中，人脸图像训练样本之间存在差异，主要包括平移、尺度变化和光照条件不同等。在 PCA 中对人脸图像的预处理是为了减少或消除这种差异，使得后续的分析结果更为精确和可靠。如果图像样本之间存在平移，随平移增加图像之间的均方差增加，对应到离散 K-L 变换的系数也随之增大。 $\sigma \propto \Delta T$ ，其中 σ 为图像之间的均方差， ΔT 为图像之间的平移值。如果图像样本之间存在尺度差异，随尺度差异增大，图像之间的均方差和离散 K-L 变换的系数也随之增大。 $\sigma \propto \Delta S$ ，其中 ΔS 为图像之间的尺度差异。

2.2 LDA 理论简介

PCA 的效果除了受样本的预处理精确度的影响外，由于 PCA 的表达方式是基于均方差最小准则的，所以也可以将基于 K-L 变换的特征脸方法认为是人脸的最佳表达方法。但是基于这种最佳的表达方法所提取的最佳特征表示 (MEF)，并不一定是最适合模式识别的最佳判别特征 (MDF) [33]。MEF 在降维的同时最大限度地保留了对对象的信息量，适于数据压缩，对象表征等任务。模式识别任务要求通过特征提取得到的特征类间差异尽量的大，类内差异尽量小。基于特征类间和类内差异的要求，在人脸识别中出现了基于 LDA 的 FisherFace [2] 的方法。

线性判别分析 (LDA)，也称 Fisher 线性判别分析 (FDA) 是另一种广泛应用于模式分类问题的方法，譬如声音识别，人脸识别，多媒体信息恢复……LDA 也可应用于图像降维，它是一种基于样本的类别进行降维的方法。在统计理论中，LDA 可以在基于所有的类别都服从高斯分布并且每一类的协方差矩阵都相同的

假设下而导出。在此假设下，类与类之间的边界表示变得非常简单，因此判别起来简单明了。类似于EigenFace方法，对人脸识别来说，FisherFace方法也是找一个线性变换或者投影矩阵使得所谓的Fisher准则（**Fisher Criterion**）最大，在介绍此准则之前，有必要先定义一下几个矩阵。

首先， $X_i^{(j)}, i=1,2,\dots,n_j, j=1,2,\dots,K$ 为本章开头描述的样本。令

$$\mu_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_i^{(j)}, j=1,2,\dots,K$$

而 μ 跟前面的定义一样。则我们可以定义类间差异矩阵（Between-class Scatter Matrix） S_b 及类内差异矩阵（Within-class Scatter Matrix） S_w 如下：

$$S_b = \sum_{j=1}^K n_j (\mu_j - \mu)(\mu_j - \mu)^T$$

$$S_w = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_i^{(j)} - \mu_j)(X_i^{(j)} - \mu_j)^T$$

可以验证： $S_t = S_b + S_w$ 。有了这两个矩阵，我们就可以定义所谓的 Fisher 准则如下：

$$J(\varphi) = \frac{\varphi^T S_b \varphi}{\varphi^T S_w \varphi}, \varphi \in \mathfrak{R}^d \quad (2-3)$$

事实上，LDA 就是找一个投影矩阵 $W_{LDA} \in \mathfrak{R}^{d \times d'}$ ，其中 W_{LDA} 的任意两列相互正交，使得下面的商，即 Fisher 准则最大：

$$\begin{aligned} W_{LDA} &= \arg \max_{W \in \mathfrak{R}^{d \times d'}} \frac{|W^T S_b W|}{|W^T S_w W|} \\ &= [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{d'}] \end{aligned} \quad (2-4)$$

其中 $\{w_i | i=1,2,\dots,d'\}$ 为是 S_b 与 S_w 的广义特征值 λ_i 相对应的广义特征向量，即：

$$S_b w_i = \lambda_i S_w w_i, i=1,2,\dots,d'$$

当 S_w 的逆存在时，广义特征向量可通过对 $S_w^{-1}S_b$ 进行特征值分解得到。同 PCA 一样，新的样本特征可通过如下变换得到：

$$Y_i = W_{LDA}^T X_i \in \mathfrak{R}^{d'}, i=1,2,\dots,N$$

2.3 PCA+LDA 方法及其缺陷

对PCA来说，由它计算得到的向量的统计意义在于使得样本在此向量的投影上具有最大方差。而对于LDA来说，它所计算得出的向量则是使得不同类的样本点在此向量对应的方向上的投影尽可能的分开。因此，一般来说，当维数不是很高，而且样本数不是很少的情况下，LDA的分类效果比PCA的分类效果好[11]。然而，在实际应用中，特别是在人脸、图像识别中，由于维数问题，LDA通常遇到两个方面的困难：1) 类内方差矩阵 S_w 总是奇异的,这是由于 S_w 的秩最多为 $N-K$ ，而一般情况下,用于训练的图像数目 N 是远小于每幅图像的像素数目，即“小样本问题”经常出现；2) 计算的复杂度。在高维空间 \mathfrak{R}^d 中，要得出一个 d 维的分类向量的复杂度远远高于计算一个低维空间 $\mathfrak{R}^{d'}$ 的分类向量。

“PCA+LDA”是一种非常有效的用来解决上面两个问题的方法。Yang等人在[8]中已经对“PCA+LDA”方法的理论基础进行了探讨。这个方法的步骤大概如下。首先，用PCA进行降维，通过一个投影矩阵 W_{PCA} 将 d 维样本空间降为 d' 维的特征空间 ($d' \ll d$)；然后，再利用LDA得出一个变换矩阵 W_{LDA} 进行判别分类。从而，我们可以得出“PCA+LDA”的变换矩阵如下：

$$W_{opt}^T = W_{LDA}^T W_{PCA}^T \tag{2-5}$$

其中， W_{PCA} 为公式 (2-1) 对应的最优解，而

$$\begin{aligned} W_{LDA} &= \arg \max_W \frac{|W^T W_{PCA}^T S_b W_{PCA} W|}{|W^T W_{PCA}^T S_w W_{PCA} W|} \\ &= \arg \max_W \frac{|W^T S_b' W|}{|W^T S_w' W|} \end{aligned} \quad (2-6)$$

由于类内差异矩阵 $S_w \in \mathfrak{R}^{d \times d}$ 满足： $rank(S_w) \leq \min\{d, N - K\}$ 。当“小样本问题”发生时，即 $N < d + K$ 时，类内差异矩阵 S_w 必定奇异，此时最优化问题 (2-4) 不能直接求解。为了使得在经过PCA处理后，LDA的最优化问题 (2-6) 可解，在PCA中， d' 必须是一个不大于 $N - K - c$ 的正整数，其中 c 是一个通常等于1的正整数。大多数情况下，经过PCA变换后，最优化问题 (2-6) 中的类内差异矩阵 S_w' 将是非奇异的， W_{LDA} 可以成功解出。但是，即使经过PCA将维数从 d 降到 $d' = N - K - c$ ，类内差异矩阵 S_w' 仍然可能是奇异的。下面给出一个简单的例子说明这个可能性。

假设 $d = 8, N = 7, K = 3, n_1 = n_2 = 2, n_3 = 3$ ，且样本矩阵如下：

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{21}}{7} & \frac{-3\sqrt{21}}{7} & \frac{-3\sqrt{21}}{7} & \frac{-3\sqrt{21}}{7} & \frac{4\sqrt{21}}{7} & \frac{4\sqrt{21}}{7} & \frac{4\sqrt{21}}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{-3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此样本矩阵，我们可以得出：

$$S_b = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

且有：

$$S_t = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

S_t ， S_b 及 S_w 均为对称、半正定的矩阵，满足： $S_t = S_b + S_w$ 。更进一步地，它们还满足：

$$\text{rank}(S_t) = 5 < N - 1,$$

$$\text{rank}(S_b) = 1 < K - 1,$$

以及，

$$\text{rank}(S_w) = 4 < N - K。$$

从上面的几个矩阵容易看出，通过PCA将维数从 $d = 8$ 降为 $d' = N - K - 1 = 3$ 后，

$$S'_w = W_{PCA}^T S_w W_{PCA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

仍然是奇异的。事实上，无论将维数 d 降到多小，如 $d' = 2$ ，或 $d' = 1$ ， S'_w 总是奇异的。这是因为， S_l 是对角阵，对应于它前面几个非零最大特征值： $\lambda_1 = 36, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_5 = 1$ 的特征向量分别为： $e_1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ ， $e_2 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ ， \dots ， $e_5 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$ ，所以，经过PCA得到的变换矩阵 W_{PCA} 即是由上面正交标准基构成的矩阵。另一方面，由于 S_l 的最大特征值 36 对应于第一个标准正交基 e_1 ，所以，经过变换后， S'_w 的第一行与第一列全为 0。这就说明了为什么无论 d' 如何取， S'_w 总保持奇异。

总之，我们可以看出，“PCA+LDA”的方法并不是总能成功的。而且仅靠减小 d' 的方法来保证此方法顺利进行是不可能的。

第3章 本文方法：逆 Fisher 判别分析

在这一章，本文将根据一种新的 Fisher 判别准则，提出一种新的 Fisher 判别分析方法。首先，本章会先介绍此新的 Fisher 判别准则；然后依据此准则，提出一种新的类似“PCA+LDA”方法的新框架。此新框架也由两个主要步骤构成，第一步是对原 PCA 的步骤加入了特征向量选择的限制条件，第二步是使用新的 Fisher 判别准则进行判别分类；其次，本文将证明，在一定条件下，此新的框架不会像“PCA+LDA”那样出现失败的情况；在最后，本文将会给出基于此框架的算法描述以及其复杂度分析。本章所考虑的问题仍然是上一章提出的 K 类人脸问题。

3.1 本文的理论基础—— S_t , S_b , S_w 及其零空间

在介绍本文的新方法之前，首先对“PCA+LDA”方法给出一些注记：

- 在PCA步骤中，一些对后面LDA进行分类很有效的特征向量可能被丢掉，一些不重要的特征向量可能被选取。这是因为，在PCA中，由于只是选择了 S_t 的前 $d' = N - K - c$ 个最大特征值对应的特征向量，而丢掉其余的特征向量。在剩下的较小非零特征值对应的特征向量中，很有可能存在着对后面进行LDA分类很重要的特征向量，使得样本矩阵在这些特征向量对应的方向上投影过后，类与类之间的距离比在其它特征向量上投影后的距离还要大。同样道理，在较大的非零特征值对应的特征向量中，也有可能存在着对后面LDA分类并不十分重要，甚至是影响分类结果的特征向量。
- 在PCA进行降维后，对降维后的新的样本空间使用LDA并不能保证一定成功。反例已经由上章给出。

- 类内差异矩阵 S_w 的零空间中存在着对分类起非常大作用的、判别性能非常好的判别信息。譬如说，设存在 S_w 的零空间中的向量 β ，满足 $\beta^T S_w \beta = 0$ 且 $\beta^T S_b \beta \neq 0$ ，则显然，此向量使得最优化问题 (2-4) 最大化，从几何意义来说，不同类的样本在此方向上投影后，彼此间的距离足够远。

根据上面的注记，下面将进一步考察PCA方法，Fisher准则，总差异矩阵 S_t ，类间差异矩阵 S_b ，以及类内差异矩阵 S_w 的特征空间的一些性质。

我们先来看看 S_t ， S_w ，及 S_b 的特征向量以它们的零空间的关系。

定义 1 设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$ 为 S_t 特征值按从大到小排列对应的特征向量，并设 S_t 的秩为 m ，令 $\Phi_t = \text{span}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ ，则它的正交补定义为 $\Phi_t^\perp = \text{span}\{\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_d\}$ 。

显然， Φ_t^\perp 为 S_t 的零空间。由于 S_t ， S_b 及 S_w 均为对称、半正定矩阵，且有 $S_t = S_b + S_w$ 。容易得到如下引理及定理。

引理 1 $\beta^T S_t \beta = 0$ 当且仅当 $\beta^T S_w \beta = 0$ 及 $\beta^T S_b \beta = 0$ 。

引理 2 设 A 是对称、半正定矩阵，则 $\beta^T A \beta = 0$ 当且仅当 $A \beta = 0$ 。

证明：充分性显然，只须证必要性。

事实上，由于 A 是对称、半正定矩阵的，故存在矩阵 M 使得， $A = M^T M$ ，由 $\beta^T A \beta = \beta^T M^T M \beta = (M \beta)^T M \beta = 0$ ，我们有， $M \beta = 0$ ，从而：

$$A\beta = M^T(M\beta) = 0。$$

证毕。

定理 1 对任意 $\varphi \in \mathfrak{R}^d$ ， φ 可以分解为 $\varphi = \xi + \gamma$ ，其中 $\xi \in \Phi_t$ ， $\gamma \in \Phi_t^\perp$ ，且有： $J(\varphi) = J(\xi)$ 。

证明： 由于 $R^d = \text{span}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d\} = \Phi_t \oplus \Phi_t^\perp$ 。从而由投影定理：

$$\varphi = \underbrace{\lambda_1\beta_1 + \dots + \lambda_m\beta_m}_m + \underbrace{\lambda_{m+1}\beta_{m+1} + \dots + \lambda_d\beta_d}_{d-m} = \xi + \gamma, \quad \xi \in \Phi_t, \quad \gamma \in \Phi_t^\perp$$

故 $\gamma^T S_t \gamma = 0$ ，根据引理1，有 $\gamma^T S_w \gamma = 0$ 及 $\gamma^T S_b \gamma = 0$ 。再由引理2， $S_w \gamma = 0$ 及 $S_b \gamma = 0$ ，可得：

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \frac{\varphi^T S_b \varphi}{\varphi^T S_w \varphi} \\ &= \frac{(\xi + \gamma)^T S_b (\xi + \gamma)}{(\xi + \gamma)^T S_w (\xi + \gamma)} \\ &= \frac{\xi^T S_b \xi + 2\xi^T S_b \gamma + \gamma^T S_b \gamma}{\xi^T S_w \xi + 2\xi^T S_w \gamma + \gamma^T S_w \gamma} \\ &= \frac{\xi^T S_b \xi}{\xi^T S_w \xi} \\ &= J(\xi) \end{aligned}$$

证毕。

根据上面的定理1，我们可以看出，最优问题 (2-4) 所有的解都可以从 S_t 的非零特征值对应的特征向量集合中得到而不丢失任何重要信息。这也在一定程度上解释了为什么在PCA步骤后可以加上LDA，而使识别率提高。

接着，我们来进一步看看 S_w 的零空间中包含的信息对识别的作用。定理1已

经告诉我们 S_t 的零空间 Φ_t^\perp 对Fisher准则并不起作用。所以，一般来说，我们可以先将样本矩阵投影到 S_t 的值域中得到新的系数矩阵，再进行处理，此时对应的总差异矩阵将是正定对称矩阵。因此，我们可以只考虑 S_t 为正定、对称矩阵的情形。

定义 2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ 为 S_w 特征值按从大到小排列对应的特征向量，并设 S_w 的秩为 q ，令 $\Phi_w = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q\}$ ，则它的正交补定义为 $\Phi_w^\perp = \text{span}\{\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_d\}$ 。

显然， Φ_w^\perp 为 S_w 的零空间。我们可得到如下定理。

定理 2 设 S_t 为对称、正定矩阵， S_w, S_b 为对称、半正定矩阵满足 $S_t = S_b + S_w$ ，则 $\varphi \neq 0$ ，且 $\varphi \in \Phi_w^\perp$ 当且仅当 $\varphi^T S_b \varphi > 0$ 及 $\varphi^T S_w \varphi = 0$ 。

证明：先证必要性。

若 $\varphi \in \Phi_w^\perp$ ，则显然有 $\varphi^T S_w \varphi = 0$ ，再根据 S_t 为对称、正定矩阵且 $\varphi \neq 0$ ，可得 $\varphi^T S_t \varphi > 0$ 。再由 $S_t = S_b + S_w$ ，可得：

$$\begin{aligned} & \varphi^T S_b \varphi \\ &= \varphi^T S_t \varphi - \varphi^T S_w \varphi \\ &= \varphi^T S_t \varphi \\ &> 0 \end{aligned}$$

下证充分性。

设 $\varphi^T S_b \varphi > 0$ 且 $\varphi^T S_w \varphi = 0$ ，则由引理1知 $\varphi \neq 0$ 且有 $S_w \varphi = 0$ ，从而 $\varphi \in \Phi_w^\perp$ 。证毕。

定理2有力地说明了 S_w 的零空间中确实存在着对识别非常重要的信息。相

反， S_b 的零空间信息对识别来说并不是很重要，事实上，这个结论可由定理2的如下推论来说明。

推论 1 设 S_t 为对称、正定矩阵， S_w ， S_b 为对称、半正定矩阵满足 $S_t = S_b + S_w$ ，则 $\varphi \neq 0$ ，且 $\varphi \in \Phi_b^\perp$ 当且仅当 $\varphi^T S_w \varphi > 0$ 及 $\varphi^T S_b \varphi = 0$ 。其中 Φ_b^\perp 为 S_b 的零空间。

3.2 Fisher 准则及逆 Fisher 准则

1. Fisher 准则及其变体

一方面，根据第2章后面给出的例子，我们知道“PCA+LDA”的方法并不能保证整个过程的顺利进行。另一方面，在图像处理，人脸识别等等实际应用中，“小样本问题”也经常是一个棘手的问题。这两方面的问题都是因为训练样本对应的类内差异矩阵（Within-class Scatter Matrix） S_w 在实际应用中经常是奇异的。关于解决这种奇异的方法，有各种各样，一种就是所谓的正则化（Regularization），即在 S_w 上加个一个小扰动来避免 S_w 的奇异性[12] [13]。下面主要介绍一下另一种解决方法：使用新的Fisher准则[2] [6] [30]。

很自然地，人们希望在求解最优化问题（2-4）时，希望新的Fisher准则不会出现不可解的情形，也就是有关运算的矩阵不会奇异。一种方法就是通过修改Fisher准则中的分母部分对应的类内差异矩阵 S_w ，比如代替为总差异矩阵 S_t ：

$$\begin{aligned} W_{LDA}^1 &= \arg \max_{W \in \mathbb{R}^{d \times d}} \frac{|W^T S_b W|}{|W^T S_t W|} \\ &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_d] \end{aligned} \quad (3-1)$$

最优化问题（3-1）的合理性可由定理1说明，由于对Fisher判别来说， S_t 的零空间包含的信息并不重要，或者说不起作用，因此，可以先将训练样本空间投

影到 S_i 的值域上，从而保证 S_i 的非奇异性。

另一种方法则索性去掉 S_w 而只保留Fisher准则的分子部分，如下：

$$\begin{aligned} W_{LDA}^2 &= \arg \max_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} |W^T S_b W| \\ &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{d'}] \\ \text{s.t.} \quad &\|w_i\| = 1, \ i = 1, 2, \dots, d' \end{aligned} \quad (3-2)$$

这种方法只考虑到类间差异矩阵，而不管类内差异如何。因此，为了同时将这两种差异矩阵考虑进来，并考虑到 S_w 零空间中信息的重要性，在（3-2）的基础上可以加上如下限制，成为另一个类似的Fisher准则：

$$\begin{aligned} W_{LDA}^3 &= \arg \max_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} |W^T S_b W| \\ &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{d'}] \\ \text{s.t.} \quad &w_i^T S_w w_i = 0, \ \|w_i\| = 1, \ i = 1, 2, \dots, d' \end{aligned} \quad (3-3)$$

以上三个准则都各有各的优势与缺点，本文在此不对它们的优缺点进行评论与比较。相反，下面将给出一个新的Fisher准则，同样是在原Fisher准则的基础上进行修改得到。

2. 逆 Fisher 准则——The Inverse Fisher Criterion

形式上，我们有如下等价关系：

$$\arg \max_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} \frac{|W^T S_b W|}{|W^T S_w W|} \Leftrightarrow \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} \frac{|W^T S_w W|}{|W^T S_b W|}$$

即将Fisher准则中的分子与分母对调求最小与原来求最大在形式上等价。因此，在不考虑奇异的情况下，我们可以用下面的商作为新的Fisher准则来求最优化问题：

$$\begin{aligned}
 W_{IFDA} &= \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d}} \frac{|W^T S_w W|}{|W^T S_b W|} \\
 &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_d]
 \end{aligned} \tag{3-4}$$

此准则可称为“逆Fisher准则”（The Inverse Fisher Criterion）。对比于原来使用原来Fisher准则的LDA或者FDA，使用“逆Fisher准则”进行判别分析的过程可称为“逆Fisher判别分析”（the Inverse Fisher Discriminant Analysis, IFDA）。在特殊的情况下，即类内差异矩阵 S_w 及类间差异矩阵 S_b 的逆都存在时，可以证明，最优化问题（2-4）的解与上面最优化问题（3-4）的解是一致的。然而，注意到在人脸识别中，类间差异矩阵 $S_b \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ，且其秩满足： $rank(S_b) \leq K - 1$ ，且 d 比 K 大得多，因此，使用此准则时， S_b 的逆不存在，这样仍然导致“小样本问题”的出现。

但是，依据定理2及其推论1，我们知道， S_w 的零空间中存在着对判别较为重要的信息。相反， S_b 的零空间中存在的信息并不是很重要，因为其中的特征向量总使得Fisher准则（2-3）为零。故我们可以不考虑存在于 S_b 零空间中的信息并将其丢弃。这可通过将训练样本投影到 S_b 的值域来实现。

具体如下：

- 由 S_b 的对称性及正定性， S_b 有如下酋分解： $S_b = U_b D_b U_b^T$ ，其中 U_b 为 S_b 的特征分解对应的酋矩阵，其列两两正交， D_b 为 S_b 的特征值组成的矩阵；
- 对照 D_b ，选择 U_b 中那些非零特征值对应的特征向量组成投影矩阵 W_{Sb_proj} ；
- 将投影矩阵作用到训练样本矩阵上，即 $Y = W_{Sb_proj}^T X$ ，然后对此新样本

进行“逆Fisher判别分析”，即求解最优化问题（3-4）。

事实上，上面的过程可以总结如下：

$$\begin{aligned}
 W_{IFDA} &= \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} \frac{|W^T W_{Sb_proj}^T S_w W_{Sb_proj} W|}{|W^T W_{Sb_proj}^T S_b W_{Sb_proj} W|} \\
 &= \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} \frac{|W^T S'_w W|}{|W^T S'_b W|} \\
 &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{d'}]
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

最优化问题（3-5）可以独立地成为一种判别分析方法，投影的过程，类似于降维的过程，而后面的最优问题的解，即是找一个较优的子空间进行特征表示，使得这些特征表示可以区分类与类之间的差别。考虑到“PCA+LDA”在应用中的有效性，下面将进一步考察PCA过程，并提出一种新的规则对此PCA过程进行部分修改。

3.3 带特征选择的主成分分析——PCA with Selection

PCA表征中的关键问题是主成分分量的选取范围及其对性能的影响，而主成分的选取会影响LDA的分类判别是否会产生过拟合。在图像的表征中选取的主成分分量越多，图像的信息量保留越多，图像重建的效果也就越好。然而同样的推理在分类判别中并不成立，选取过多的主成分分量可能会导致识别率的降低。这是由于较小的特征值对应着高频信息，很有可能就是噪声的编码。如果把这些特征值所对应的特征向量也用于构造PCA子空间，LDA就必须对噪声也进行拟合，从而导致了过拟合的发生。

另一方面，较小的特征值对应的特征向量也有可能包含着对分类来说相对重要的信息，如果只是简单的完全抛弃，很有可能影响最后使用LDA进行分类的结果。在标准的“PCA+LDA”方法的局限性在于没有考虑过拟合及小特征值的问题，而直接采用 $N - K - c$ 个最大的特征值所对应的特征向量来构造PCA子空间，进行LDA判别分类。

再者，虽然较大的特征值对应的特征向量包含着人脸或者目标非常重要的信息，在图像重构与目标信息提取中起着关键性的作用，但是，对分类来说，我们并不能保证越大的特征值对应的特征向量对后面LDA或者其它判别分析方法起的分类作用越大。相反地，很有可能大的特征值对应的特征向量只是在重构非常有用，而在分类中起的作用反而比较小的特征值对应的特征向量弱。下面举个例子说明这种情况存在的可能性。见图3-1。

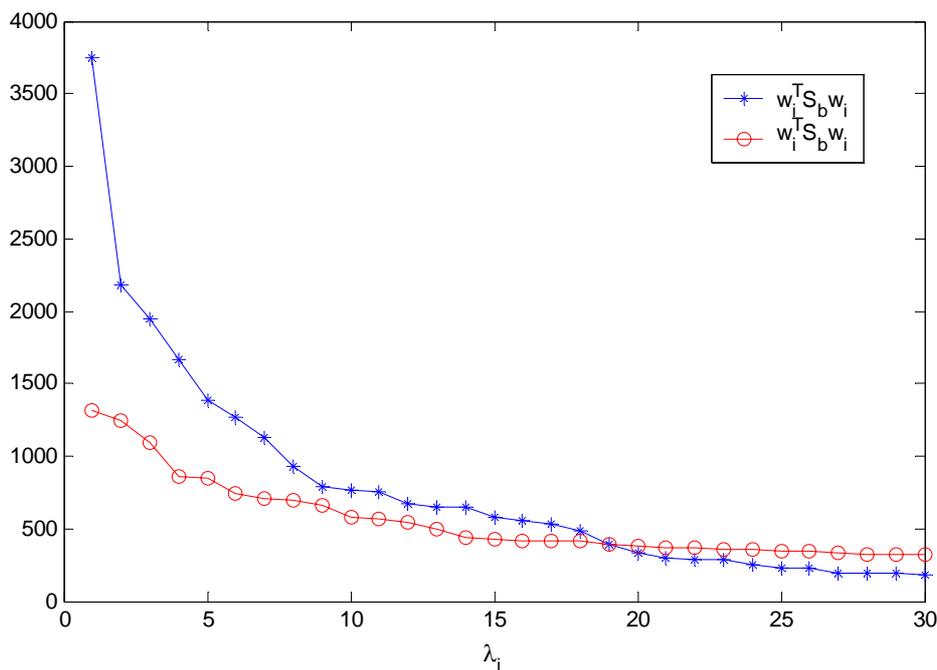


图 3-1: 来自FERET数据库的 $w_i^T S_b w_i$ 与 $w_i^T S_w w_i$ 分布图，

w_i 为 S_i 的特征向量，横坐标为 S_i 的特征值从大到小的编号。

图3-1是根据FERET数据库应用PCA得出总差异矩阵 S_i 的特征值与特征向量画出的。其中“*”曲线对应于 $w_i^T S_b w_i$ ，而“o”曲线对应于 $w_i^T S_w w_i$ 。从图中我们可以看出，虽然大多较大的特征值对应的 $w_i^T S_b w_i$ 要大于 $w_i^T S_w w_i$ ，也就是较大特征值对应的特征向量较有利于后面的LDA判别分析，但是，也可以看到存在着较大的特征值对应的 $w_i^T S_b w_i$ 要小于 $w_i^T S_w w_i$ 。由此可以说明，在PCA过程中，只

单纯地选择前 $N - K - c$ 个最大特征值对应的特征向量并不能保证后面使用LDA的分类效果好。

根据上面的分析，对PCA的特征选择方法，我们希望做出一些修改。考虑到Fisher判别分析的思想就是求得一个投影矩阵，使得投影后不同类别的样本尽可能分开，而原始的PCA并没有“分类”的思想，它使求出的主成分方向只是使得训练样本在此主向上的投影的方差最大。因此下面将在PCA的基础上加上Fisher“分类”的思想，对最优化问题（2-1）加上限制如下：

$$\begin{aligned} W_{\text{PCA}_S} &= \arg \max_{W \in \mathbb{R}^{d \times d'}} |W^T S_t W| \\ &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{d'}] \\ \text{s.t. } w_i^T S_b w_i &> w_i^T S_w w_i, \quad \|w_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, d' \end{aligned} \quad (3-6)$$

使用公式（3-6）进行PCA的过程可称为：“带特征选择的主成分分析”（PCA with Selection, PCA_S）。Fisher准则（2-3）的思想是使比值： $\frac{w_i^T S_b w_i}{w_i^T S_w w_i}$ 尽可能大，在这里，进行PCA过程中，事先就加入限制规则： $w_i^T S_b w_i > w_i^T S_w w_i$ 是希望这样选择的特征向量产生的变换矩阵 W_{PCA_S} 可以初步有效地将类与类之间的距离拉远。这样，可以更好地为后面再进行Fisher判别分析或者其它判别分析服务。

类似于“PCA+LDA”的两步骤方法，我们当然可以用上面的方法“PCA_S”加上“LDA”。这也是一种新的方法，本文在此处不详细叙述，可做进一步的研究。为了结合上面的“逆Fisher判别分析”，下面将主要介绍“PCA_S+IFDA”的方法，即“带特征选择的主成分分析”+“逆Fisher判别分析”。

3.4 带特征选择的主成分分析与逆 Fisher 判别分析——PCA_S+IFDA

我们将最优化问题（3-5）与最优化问题（3-6）结合起来，对应的方法即为“PCA_S+IFDA”方法，其解是下面的最优化问题的解：

$$W_{opt}^T = W_{IFDA}^T W_{Sb_proj}^T W_{PCA_S}^T \quad (3-7)$$

其中， W_{PCA_S} 为最优化问题（3-6）的解，这个步骤主要将维数降至一定程度，使问题的规模大大减小；而 W_{Sb_proj} 由经过 W_{PCA_S} 变换后对应的类间差异矩阵的非零特征值对应的特征向量组成的投影矩阵，这个步骤使得处理后训练样本对应的类间差异矩阵非奇异。 W_{IFDA} 则为如下最优化问题的解：

$$\begin{aligned} W_{IFDA} &= \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d}} \frac{|W^T W_{Sb_proj}^T W_{PCA_S}^T S_w W_{PCA_S} W_{Sb_proj} W|}{|W^T W_{Sb_proj}^T W_{PCA_S}^T S_b W_{PCA_S} W_{Sb_proj} W|} \\ &= \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d}} \frac{|W^T W_{Sb_proj}^T S_w' W_{Sb_proj} W|}{|W^T W_{Sb_proj}^T S_b' W_{Sb_proj} W|} \\ &= \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d}} \frac{|W^T S_w'' W|}{|W^T S_b'' W|} \\ &= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{d'}] \end{aligned} \quad (3-8)$$

在人脸识别中，Fisher判别分析称其得到的变换矩阵 W_{FDA} 的列为“Fisher脸”（FisherFace），其方法称为“Fisher脸方法”，类似的，这里，我们可称应用逆Fisher判别分析得到的变换矩阵的列为“逆Fisher脸”（Inverse Fisher Face, **IFFace**），对应的这种方法称为“逆Fisher脸方法”（**IFFace Method**）。

相应于本章开头对“PCA+LDA”给出的注记，下面对“PCA_S+IFDA”也给出一些注记：

- 我们在PCA过程中，加入了特征向量的限制规则： $w_i^T S_b w_i > w_i^T S_w w_i$ ，避免了只是单纯地选择对应于最大特征值的特征向量，而选择那些对后面进行判别分类有较大作用的特征向量，其中可能包括小特征值对应的特征向量。
- 此方法与原来的存在着本质区别。原来的PCA步骤与类别无关，可以看成是一种无监督的方法。而此方法中，由于 S_b 、 S_w 是根据类与类或类

内差别得出的矩阵，因此是一种有监督的方法。

- 在进行“逆Fisher判别分析”过程中， S_w 的零空间所包含的信息也被考虑进来了。事实上，由于“逆Fisher准则”（3-4）是求最小，而由定理2易知，当 $\beta^T S_w \beta = 0$ 时， $\beta^T S_b \beta > 0$ ，此时 β 为最优化问题（3-8）的一个解。因此，最优化问题（3-8）的解包含 S_w 的零空间的信息。
- 带特征选择的主成分分析（PCA_S）后，再使用 $W_{S_b_proj}$ 将新的样本特征空间投影到类间差异矩阵 S'_b 的值域中，是为了保证“逆Fisher判别分析”的顺利进行，但在一定条件下，可以证明，此步骤不是必需的。这可由下面的定理说明。

定理 3 设总差异矩阵 S_t 、类内差异矩阵 S_w 、类间差异矩阵 S_b 均为对称、半正定矩阵且满足 $S_t = S_b + S_w$ 。 $\{w_i | i=1,2,\dots,d'\}$ 是 S_t 的特征向量且满足： $w_i^T S_b w_i > w_i^T S_w w_i$ ， $i=1,2,\dots,d'$ 。从 $\{w_i | i=1,2,\dots,d'\}$ 中任取两个不同特征向量组成 W_{PCA_S} ，则 $S'_b = W_{PCA_S}^T S_b W_{PCA_S}$ 必满秩，即非奇异。

证明：事实上，设 $W_{PCA_S} = [u \ v]$ ， $u, v \in \{w_i | i=1,2,\dots,d'\}$ ， $u \neq v$ ，则有：

$$S'_b = W_{PCA_S}^T S_b W_{PCA_S} = [u \ v]^T S_b [u \ v] = \begin{pmatrix} u^T S_b u & u^T S_b v \\ v^T S_b u & v^T S_b v \end{pmatrix}$$

$$S'_w = W_{PCA_S}^T S_w W_{PCA_S} = [u \ v]^T S_w [u \ v] = \begin{pmatrix} u^T S_w u & u^T S_w v \\ v^T S_w u & v^T S_w v \end{pmatrix}$$

$$S'_t = W_{PCA_S}^T S_t W_{PCA_S} = [u \ v]^T S_t [u \ v] = \begin{pmatrix} u^T S_t u & u^T S_t v \\ v^T S_t u & v^T S_t v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^T S_t u & 0 \\ 0 & v^T S_t v \end{pmatrix}$$

根据， $S_t = S_b + S_w$ ，易得： $S'_t = S'_b + S'_w$ 。从而我们有： $u^T S_w v = -u^T S_b v$ 。且由于 S_t ， S_b ， S_w 为对称、半正定的矩阵，故变换后的矩阵 S'_t ， S'_b ， S'_w 也为对称、半正定的矩阵。从而我们可设：

$$S'_b = \begin{pmatrix} u^T S_b u & u^T S_b v \\ v^T S_b u & v^T S_b v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix}$$

$$S'_w = \begin{pmatrix} u^T S_w u & u^T S_w v \\ v^T S_w u & v^T S_w v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -b \\ -b & c_2 \end{pmatrix}$$

又由已知条件 $w_i^T S_b w_i > w_i^T S_w w_i$ ， $i = 1, 2, \dots, d'$ 可知 $u^T S_b u > u^T S_w u$ ， $v^T S_b v > v^T S_w v$ ，从而有：

$$a_1 > c_1, a_2 > c_2。$$

若 S'_b 奇异，则必有 S'_b 的行列式：

$$|S'_b| = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - b^2 = 0。$$

此时必有：

$$|S'_w| = \begin{vmatrix} c_1 & -b \\ -b & c_2 \end{vmatrix} = c_1 c_2 - b^2 < 0。$$

这与 S'_w 为半正定矩阵矛盾。证毕。

上面的定理3只能在只取任意两个特征向量时，结论才能成立。这种特殊的情况适应于当类别数 $K = 2$ 或者 $K = 3$ 时的情形，也就是说，当类数很少时，优化问题(3-7)中求投影矩阵 W_{Sb_proj} 的步骤可以不需要，只要在PCA_S步骤中选

取的特征向量数不多于2个即可。

在定理3的条件下，当选取的向量数多于2个时，结论不一定成立。事实上，可举例如下：

$$S_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_w = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则易知 S_t ， S_b ， S_w 为对称、半正定的矩阵，满足： $S_t = S_b + S_w$ 。且由于 S_t 为对角矩阵，故满足 $w_i^T S_b w_i > w_i^T S_w w_i$ 的 $\{w_i | i=1,2,\dots,d\}$ 为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ ，其中 $e_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ， $e_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ， $e_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ 为标准正交基。从而当选取个数为3时，易得：

$$S'_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$S'_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S'_w = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}。$$

但是显然 S'_b 为奇异的，故当选取的特征向量数多于2个时，定理3的结论不成立。

3.5 算法描述

总结上面的理论及方法，下面给出本文方法“PCA_S+IFDA”的算法描述，针对的问题仍为第一章提出的 K 类人脸识别问题，：

IFFace 算法：

- **步骤 1 (PCA)：** 依据定义得出总差异矩阵 $S_t \in \mathfrak{R}^{d \times d}$ ，再应用奇异值分解理论求得 S_t 的奇异值分解： $S_t = U^T \Lambda U$ ，其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_g, 0, \dots, 0)$ ， $g = \text{rank}(S_t)$ ， $U = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ 为首矩阵，且 u_i 与 λ_i 为 S_t 的特征向量与对应特征值， $i = 1, 2, \dots, g$ 。
- **步骤 2 (特征向量选择)：** 依据定义求出类内差异矩阵 S_w 与类间差异矩阵 S_b 。将选取规则： $w^T S_b w > w^T S_w w$ 应用到集合 $\{u_1, u_2, \dots, u_g\}$ 上，得出 $W_{PCA_S} = [u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{d'}}]$ ， $d' \leq g$ 。
- **步骤 3 (降维)：** 由上一步得映射矩阵 $W_{PCA_S} : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}^{d'}$ 。应用此映射于训练样本矩阵 $X \in \mathfrak{R}^{d \times N}$ 上可将样本的维数从 d 降至 d' ，得到 $\tilde{Y} = W_{PCA_S}^T X = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_N) \in \mathfrak{R}^{d' \times N}$ 。进一步计算降维后 Y 对应的类内差异矩阵 $S'_w = W_{PCA_S}^T S_w W_{PCA_S}$ 与类间差异矩阵 $S'_b = W_{PCA_S}^T S_b W_{PCA_S}$ 。

为保证下面逆 Fisher 判别分析的顺利进行。进一步对 S'_b 应用 SVD 分解得出 $S'_b = U_b^T \Lambda_b U_b$ ，取 S'_b 非零特征值对应的特征向量组成变换矩阵 $W_{Sb_proj} : \mathfrak{R}^{d'} \rightarrow \mathfrak{R}^{d''}$ 。应用 W_{Sb_proj} 对 S'_b ， S'_w 进一步变换得：
 $S''_b = W_{Sb_proj}^T S'_b W_{Sb_proj}$ ， $S''_w = W_{Sb_proj}^T S'_w W_{Sb_proj}$ 。得到降维至 d'' 后的样本矩阵为：

$$Y = W_{Sb_proj}^T \tilde{Y} = W_{Sb_proj}^T W_{PCA_S}^T X = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \in \mathfrak{R}^{d'' \times N}。$$

➤ **步骤 4 (逆 Fisher 判别分析)**: 应用“逆 Fisher 判别分析”(3-8) 于上一步骤得到的 Y ，即求出满足 $(S''_b)^{-1} S''_w v = \gamma v$ 的特征值 $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_q$ 及对应特征向量 v_1, v_2, \dots, v_q ， $q \leq d''$ 组成变换矩阵 $W_{IFDA} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_q]$ 。

➤ **步骤 5 (特征表示)**: 这样，我们可以得到特征表示的最终变换矩阵：
 $W_{opt}^T = W_{IFDA}^T W_{Sb_proj}^T W_{PCA_S}^T$ 。且应用此变换矩阵，可得训练样本的最终表示为：

$$Z = W_{opt}^T X = W_{IFDA}^T W_{Sb_proj}^T W_{PCA_S}^T X。$$

➤ **步骤 6 (决策)**: 对一个未知的样本 $X_{new} \in \mathfrak{R}^d$ ，要判断其所属类别 $G_j, j=1, 2, \dots, K$ 。首先应用步骤 5 得出的最终变换矩阵 W_{opt} 得到 X_{new} 的特征表示 $Z_{new} = W_{opt}^T X_{new}$ 。然后求出 Z_{new} 与类别 G_j 的距离 $distance(Z_{new}, G_j)$ ， $j=1, 2, \dots, K$ 。最终的判别结果由下式给出：

$$X_{new} \in G_k = \arg \min_{G_k} distance(Z_{new}, G_j)$$

关于步骤 6，求 $distance(Z_{new}, G_j)$ 可通过计算 Z_{new} 与 G_j 中每个已知样本的距离，并用最近邻法则取其中最小的距离来代表 $distance(Z_{new}, G_j)$ 。也可以用 G_j 内所有样本的特征表示的平均 \bar{Z}_j 来表示 G_j ，然后以 Z_{new} 与 \bar{Z}_j 的距离来代表

$distance(Z_{new}, G_j)$ 。

另一方面，关于距离的类型多种多样，可使用不同类型的距离来计算 $distance(Z_{new}, G_j)$ ，譬如，Euclid 距离 l^2 ，绝对值距离 l^1 ，Cosine 距离，或者 Mahalanobis 距离等等。

3.6 算法复杂度估计

对 IFFace 算法，下面对其进行复杂度分析。

考察上面的六个步骤，并考虑到特征到计算过程中特征分解是最耗时间的，因此，IFFace 算法的时间消耗主要集中在三个步骤：步骤 1 中的 PCA 求特征向量，步骤 3 的降维及步骤 4 的“逆 Fisher 判别分析”。

首先，对步骤 1 中的 PCA 求解特征向量，可用 Turk 和 Pentland[21] 提出求解特征脸的方法，这种方法的计算复杂度为 $O(N^3)$ ，其中 N 为训练样本的总数目。

其次，在步骤 3 的降维过程中，求 S'_b 的特征分解同样可用 Turk 和 Pentland 的方法，由于类间差异矩阵与总差异矩阵都为对称、半正定的矩阵，且 S'_b 可写成一个维数为 $d \times K$ 的矩阵与其本身转置的乘积，即 $S'_b = QQ^T$ ， $Q \in \mathfrak{R}^{d \times K}$ 。因此，这个步骤的计算复杂度为 $O(K^3)$ 。

最后，对“逆 Fisher 判别分析”过程，求解的是 $(S'_b)^{-1}S'_w$ 的特征分解，此时的特征空间已经从 d 降至 $d' \leq K-1$ ，因此，类似于 DLDA，此步骤的计算复杂度同样为 $O(K^3)$ 。

综上，我们可得到 IFFace 算法总的计算复杂度为： $O(N^3 + 2K^3)$ 。

第 4 章 实验结果

本章将通过设计一些实验来测试本文的方法“IFFace 方法”的性能。另外，为了说明本文方法确实有其本身的优越之处，本章也会比较“IFFace 方法”与原有的“PCA+LDA”对应的“FisherFace 方法”的性能。下面首先描述一下所使用的一些标准人脸数据库。

本章所做实验主要使用两个标准数据库，一个来自 Olivetti Research Laboratory，称为 ORL 数据库；另一个称为 FERET 数据库。这两个数据库可以用来测试同一个人不同姿势、不同光照条件，不同面部表情下，应用各种判别分析方法的性能。

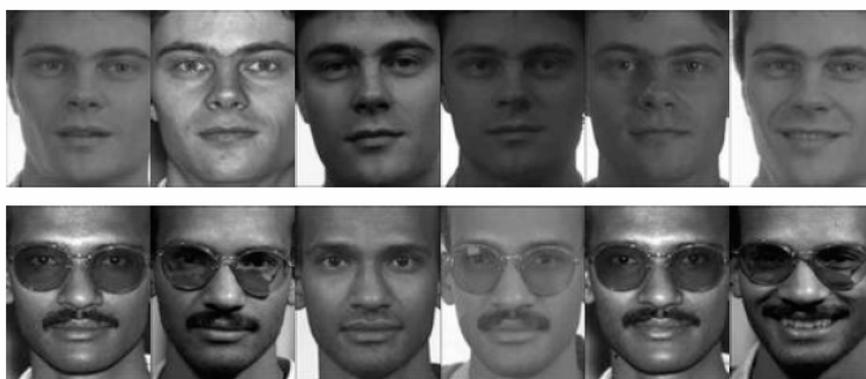
首先介绍 ORL 数据库。它总共包括 400 幅人脸像，有 40 个不同的人，每人相应于 10 幅不同表情、姿势与光照条件的人脸像，见图 4-1.a。每幅人脸像的分辨率为 92×112 。

而对 FERET 数据库，我们只使用其中一部分，取其中 72 个人，432 幅人脸像来做实验，每个人包括 6 幅不同表情、光照等条件的半身像，通过截取，得到只有人脸部分的像，其分辨率也为 92×112 ，见图 4-1.b。

由于上面得到的两个数据库 ORL 与 FERET 中每幅人脸像的规格都是一样的，因此，本方将这两个数据库合并起来，得到一个更大的数据库称为 ORL FERET 数据库，包括 112 个人 832 幅人脸像，前 40 个人来自 ORL 数据库，每人 10 幅不同的图像，后 72 个人来自 FERET 数据库，每人 6 幅不同的图像。



(a) ORL 数据库中第一个人对应的 10 幅人脸像



(b) FERET 数据库中两个人的 12 幅不同的人脸像

图 4-1 ORL 数据库与 FERET 数据库中的人脸像

本文应用 Matlab 语言实现了“IFFace 方法”的算法以及“FisherFace”的算法，并在 Matlab 环境中对几个数据库：ORL、FERET 及 ORL FERET 运行了上面的算法，测试它们的识别性能。本章实现的两种算法，在“决策”步骤，使用的是最近邻法则，即以与类中人脸最短的距离作为代表，而距离的类型都是采用 Euclid 距离 l^2 。

对每个数据库及每个类的不同训练样本数，本章的实验将不同算法各运行了 50 次，求出每次的识别率，在最后求平均值来表示该算法在不同训练样本数下的识别率。

所有的图像都经过了直方图均衡化处理。

4.1 IFFace 方法的性能

在此实验中，分别对数据库 ORL 及 FERET 运行本文的“IFFace 算法”。大概步骤如下：

- 确定每类的训练样本 n ，测试样本为 m （设每类有 $n+m$ 个不同的样本）。对每类，从 $n+m$ 个样本中随机地选取 n 个样本，通过处理构成 $d \times N$ 的训练样本矩阵 X_{trn} （ $N = nK$ ）。剩下的构成 $d \times M$ 测试样本矩阵 X_{tst} （ $M = mK$ ）。
- 对训练样本矩阵 X_{trn} ，使用“IFFace 算法”得出变换矩阵 W_{opt} 。将变换矩阵作用于训练样本矩阵 X_{trn} 及测试样本矩阵 X_{tst} 得 $Y_{trn} = W_{opt}^T X_{trn}$ ， $Y_{tst} = W_{opt}^T X_{tst}$ 。
- 计算测试样本矩阵中每个样本到每一类的距离，得出一个 $K \times M$ 的距离矩阵 D ，根据 D 算出 R 阶识别率¹（ $R = 1, 2, \dots, K-1$ ）。

对于 ORL 数据库 $n = 1, 2, \dots, 9$ ；对 FERET 数据库 $n = 1, 2, \dots, 5$ 。表 4-1，表 4-2 及图 4-2，图 4-3 给出了在不同 n 下的识别率；图 4-4，图 4-5 则给出了不同阶的识别率。

表 4-1 IFFace 算法在 ORL 数据库上不同训练样本数下的识别率

训练样本数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
识别率(%)	63.3	73.9	84.3	89.7	92.4	93.9	95.5	96.0	95.9

¹关于 R 阶识别率的定义如下： R 阶识别率就是人脸识别后对 D 排序，如果目标类排在前 R 个类中，那么就算分类正确，此时对应的识别率称为 R 阶识别率。

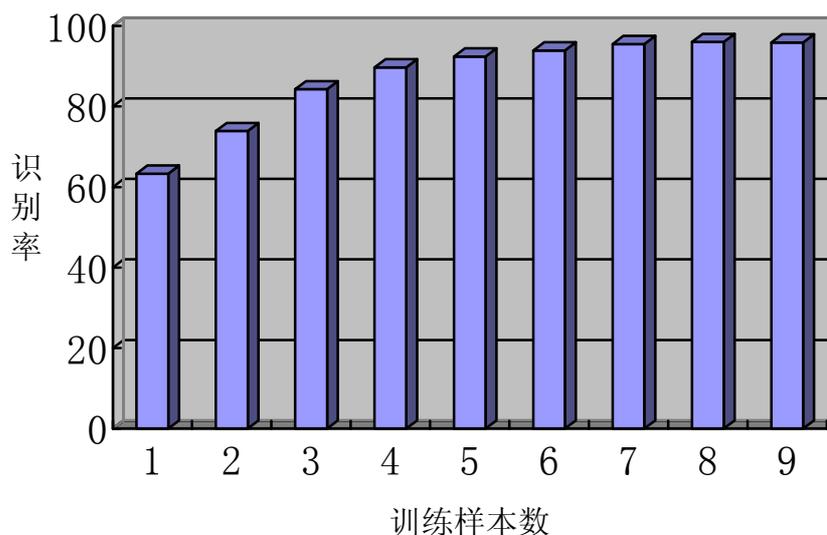


图 4-2 IFFace 算法在 ORL 数据库上不同训练样本数下的识别率的柱状图

表 4-2 IFFace 算法在 FERET 数据库上不同训练样本数下的识别率

训练样本数	1	2	3	4	5
识别率 (%)	75.1	85.0	89.5	92.2	94.3

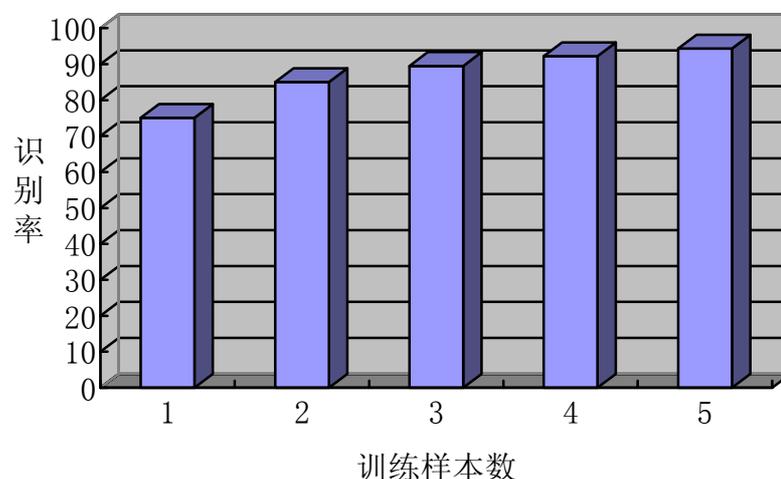


图 4-3 IFFace 算法在 FERET 数据库上不同训练样本数下的识别率的柱状图

表 4-1, 表 4-2 分别是 ORL 数据库与 FERET 数据库当训练样本数从 1 到最大可能值对应的平均识别率, 而图 4-2, 图 4-3 则是相应的柱状图。从表 4-1, 表 4-2 及图 4-2, 图 4-3 我们可以看出, 对 ORL 数据库来说, 当训练样本数 n 从 1 增加到 9 时, 应用本文“IFFace 算法”得出的平均识别率从 63% 增加到 96%; 而对

更具复杂性与挑战性的 FERET 数据库而言，我们可以看到本文的“IFFace 算法”表现得更加好，当训练样本数 n 从 1 增加到 5 时，它的识别率从 75% 增加到 94%。

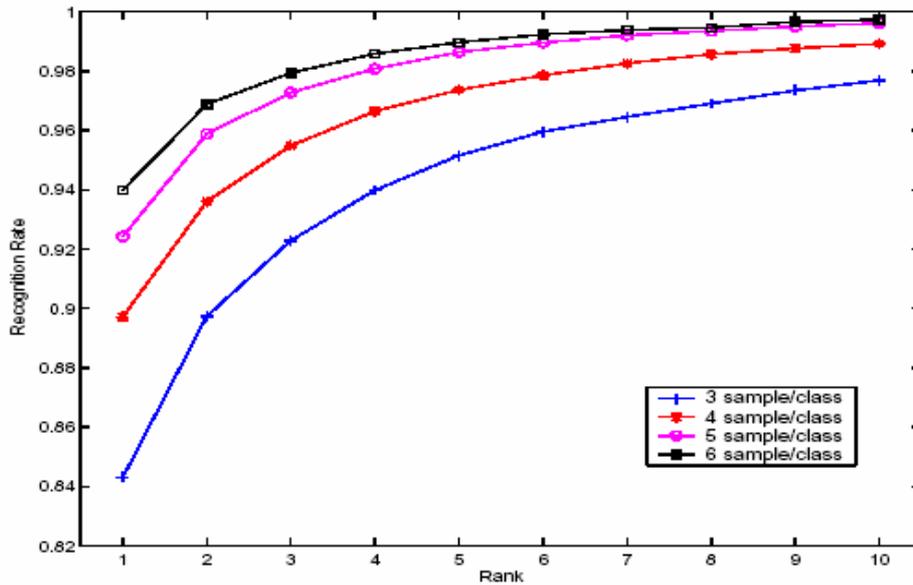


图 4-4 IFFace 算法在 ORL 数据库上不同阶的识别率的曲线图

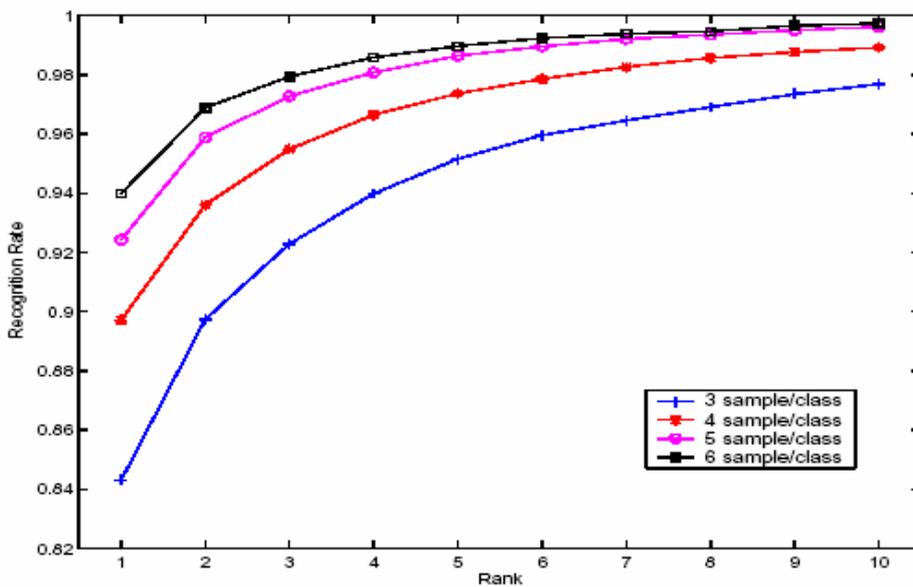


图 4-5 IFFace 算法在 ORL 数据库上不同阶的识别率的曲线图

另一方面，图 4-4，图 4-5 给出的是 ORL 及 FERET 数据库在“IFFace 算法”下不同阶的识别率，这里，我们可以看出，对这两个不同的数据库，当只要求到 5 阶识别率时，应用“IFFace 算法”得出的结果都达到了 99%。而当只要求到 10

阶识别率时，应用“IFFace 算法”得出的结果已经很几乎是100%了。由此说明该算法的有效性以及在实际应用中的可行性。

总结此实验，我们可以得出结论，“IFFace 算法”确是一种可行的，高效的，可应用于人脸变化较复杂数据库的一种算法。

4.2 IFFace 方法与 FisherFace 方法比较

众所周知，线性判别分析方法针对的是所有类别都服从高维正态分布且所有类的协方差矩阵都一样的情况。对 ORL 数据库或 FERET 数据库来说，这个要求是合理的，这可从已有的大量实验结果中得出。下面的表 4-3，表 4-4 是应用“FisherFace 算法”，即“PCA+LDA”方法在 ORL 及 FERET 数据库上得出的识别率。从表 4-3，表 4-4 中结果，也说明了线性判别分析的这个要求在此两个数据库上的合理性。

表 4-3 FisherFace 在 ORL 数据库上不同训练样本数下的识别率

训练样本数	平均识别率 (%)
2	73.4
3	84.8
4	89.4
5	91.3
6	92.7
7	94.2
8	94.1
9	94.3

表 4-4 FisherFace 在 FERET 数据库上不同训练样本数下的识别率

训练样本数	平均识别率 (%)
2	83.7
3	93.9
4	96.2
5	97.3

然而，要所有类别的协方差矩阵都一样的这个要求太高了，当此假设不成立，“FisherFace 算法” 的识别率可能会大打折扣。

类内差异矩阵 S_w 可以做为协方差矩阵的一种估计或近似。图 4-6，图 4-7 分别给出了 ORL 数据库与 FERET 数据库的类内差异矩阵 S_w 的 3-D 网格图的一部分。即以矩阵 S_w 的宽与高作为 x 轴与 y 轴，而 S_w 对应的绝对值作为 z 轴画出的 3-D 网格图。

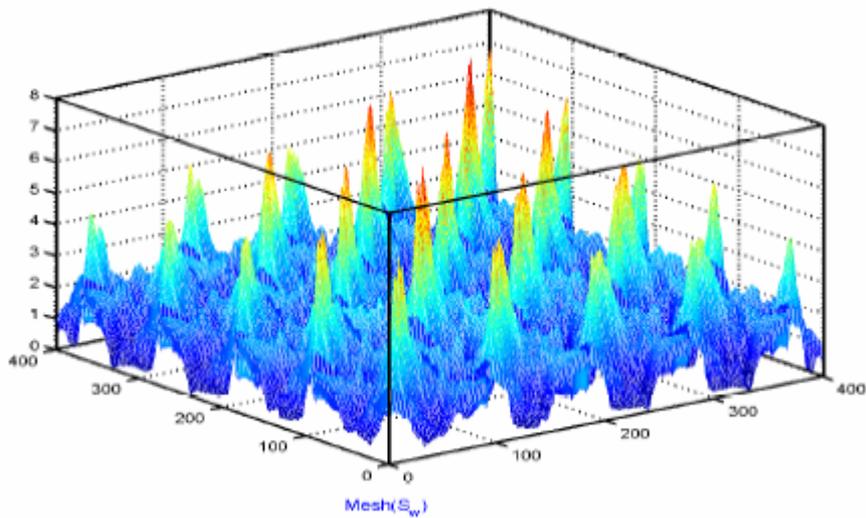


图 4-6 ORL 数据库的类内差异矩阵 S_w 的 3-D 网格图的一部分

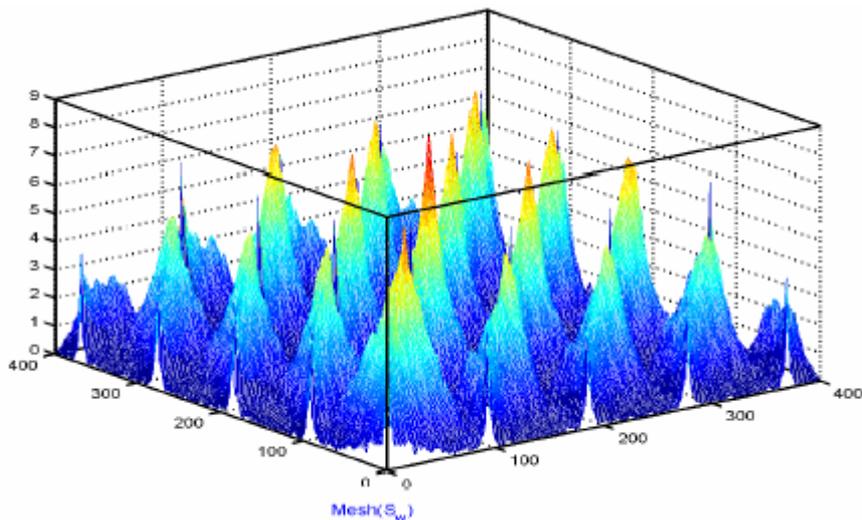


图 4-7 FERET 数据库的类内差异矩阵 S_w 的 3-D 网格图的一部分

从图 4-6，图 4-7 我们明显可以看出，这两个数据库的方差分布是截然不同的。ORL 数据库的方差分布较为起伏，而 FERET 数据库的方差分布则相对来说较为平坦。

从上面的分析及图示，我们可以看出，当把 ORL 数据库与 FERET 数据库并在一起进，得到的数据库 ORL FERET 将具有与原来两个数据库不一样的性质：具有不一致的协方差矩阵。因此，我们用此数据库来测试与比较“IFFace 算法”与“FisherFace 算法”的性能。看看在具有不一致协方差矩阵情况下，两种不同的算法表现如何。

下面简单说明一下本实验。本实验针对 ORL FERET 数据库，实现了“IFFace 算法”与“FisherFace 算法”，共运行这两算法各 50 次。每一次运行时，随机从各类中选择样本得出训练样本及测试样本。这两个算法每次运行时都是对应同一个训练样本及测试样本，以便于在同种条件下比较。表 4-5 及图 4-8 给出了平均识别率及对应的图示。

表 4-5 FisherFace 算法及 IFFace 算法在 ORL FERET 数据库的识别率

方法 训练 样本数	FisherFace 算法识别率 (%)	IFFace 算法识别率 (%)
1	N/A	66.7
2	74.9	75.1
3	83.8	85.3
4	86.3	89.6
5	87.5	92.4

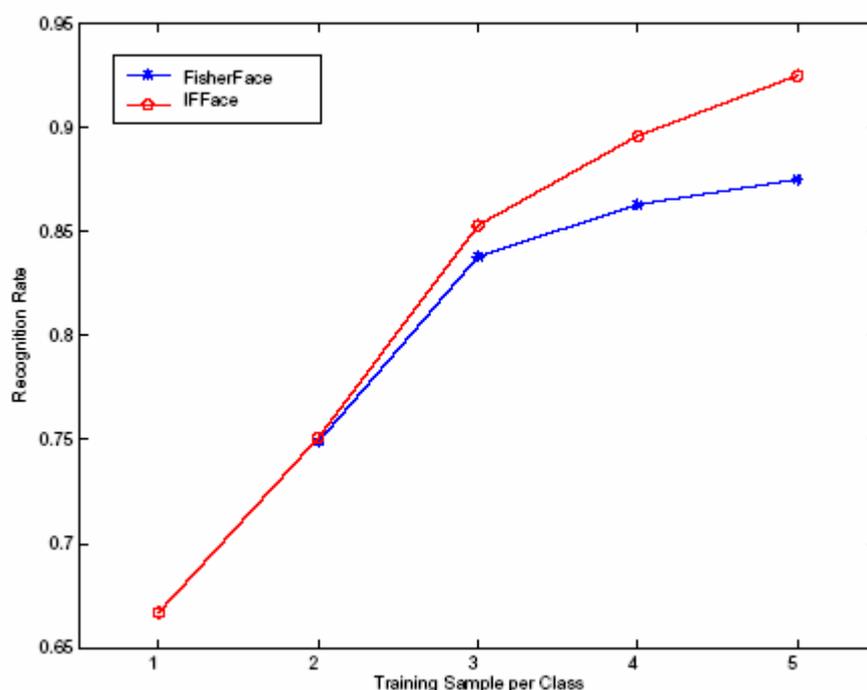


图 4-8 FisherFace 算法及 IFFace 算法在 ORL FERET 数据库的识别率曲线图

从表 4-5 我们可以看出，对“IFFace 算法”，当训练样本数 n 从 1 增加到 5 时，它的平均识别率从 66.7% 增加到 92.4%。而对于“FisherFace 算法”而言，其识别率最高也只有 87.5%（当训练样本数为 5 时）。另一方面，注意到，“FisherFace 算法”无法应用于训练样本数为 1 时的情况，但本文的“IFFace 算法”却仍可起作用，这是本文方法优于旧方法的一个地方。

而从图 4-8 我们进一步可以看出，对 ORL FERET 数据库而言，当训练样本数都一样时，本文方法都高于“FisherFace 方法”。比如，当训练样本数为 5 时，“FisherFace 方法”的平均识别率只有 87.5%，而本文的方法却达到了 92.4%。

总结本实验，“IFFace 方法”即使在每类的协方差矩阵不一样的情况下，也可得出较好的识别率，并优于旧的“FisherFace 方法”。

第 5 章 总结与展望

本文通过研究主成分分析与 Fisher 判别分析的理论以及应用的优缺点，提出了一种新的人脸特征提取与人脸识别的方法：逆 Fisher 判别分析。另一方面，结合在主成分分析的基础上加上与类别有关的特征选择规则的方法，本文发展了一种新的类似于“PCA+LDA”的框架：带特征选择的 PCA 加上逆 Fisher 判别分析，并给出了对应的算法：“IFFace 算法”。最后，通过实验，本文验证了新方法的有效性以及比“FisherFace 算法”的优越性。下面总结如下：

首先，应用本文的方法不会出现“PCA+LDA”方法在类内差异矩阵 S_w 逆不存在时失败的情况。保证了程序的顺利运行。这主要是因为 IFFace 算法中，使用投影变换后的类间差异矩阵不会出现奇异的情况。

其次，对于“小样本问题”。我们的“IFFace 方法”即使在样本数为 1 的情况下也能正常运行。但对于“FisherFace 方法”，由于类间差异矩阵 S_w 在这种情况下为零矩阵，因此不能应用。

再次，由实验可以看出，对于每个类别的协方差矩阵并不都一样的情形，“IFFace 方法”的识别率高于“FisherFace 方法”。

最后，考虑本文算法的复杂度为 $O(N^3 + 2K^3)$ ，由于最耗费时间的步骤为特征值分解，因此本文算法的复杂度与“FisherFace 算法”的复杂度都为同一个阶。从而，当 N 或者 K 都很大时，本文方法与“FisherFace 算法”一样，是一种运算较慢的方法。

展望未来，本文还可进一步考虑如下问题：

第一、如何将本文的方法扩展到“核”的方法，类似于，PCA 到 KPCA 及

DLDA 到 KDDA 等的扩展方式，本文的方法应可进一步扩展为 Kernel 的方法；

第二、在 Kernel 情况下，本文的方法的复杂度如何，其效率及识别率是否有更进一步的提高；

第三、关于 Kernel 的逆 Fisher 判别分析，是否可结合其它方法。

参考文献

- [1] G. Baudat and F. Anouar, Generalized discriminant analysis using a kernel approach, *Neural Computation*, Vol. 12, no. 10, pp. 2385-2404, 2000.
- [2] P. N. Belhumeur, J. P. Hespanha, and D. J. Kriegman, Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence.*, Vol. 19, pp. 711-720, July 1997.
- [3] L. F. Chen, H. Y. M. Liao, J. C. Lin, M. D. Kao, and G. J. Yu, A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem, *Pattern Recognition*, Vol. 33, no. 10, pp. 1713-1726, 2000.
- [4] D. Q. Dai and P. C. Yuen, Regularized discriminant analysis and its applications to face recognition, *Pattern Recognition*, Vol. 36, no.3, pp. 845-847, 2003.
- [5] D. Q. Dai and P. C. Yuen, A wavelet-based 2-parameter regularization discriminant analysis for face recognition, Proceeding of the 4th International Conference on Audio and Video Based Personal Authentication, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.2688 (2003), 137-144.
- [6] K. Fukunaga, Introduction to Statistical Pattern Recognition (2nd Edition), Academic Press, New York, 1990.
- [7] A. K. Jain, A. Ross and S. Prabhakar, An introduction to biometric recognition, *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, Vol. 14, No. 1(2004), 4-20.
- [8] K. Liu, Y.-Q. Cheng, J.-Y. Yang, and X. Liu, An efficient algorithm for Foley-Sammon optimal set of discriminant vectors by algebraic method, *Int'l J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, Vol. 6, no. 5, pp. 817-829, 1992.
- [9] S. Z. Li and J. Lu, Face recognition using the nearest feature line method, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol. 10, pp. 439-443, Mar. 1999.
- [10] C. J. Liu and H. Wechsler, A shape- and texture-based enhanced fisher classifier

- for face recognition, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol. 10, no. 4, pp. 598-608, 2001.
- [11] A. M. Martínez, and A. C. Kak, PCA versus LDA, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 23, pp. 288-233, February 2001.
- [12] S. Mika, G. Rätsch, J. Weston, B. Schölkopf, and K.-R. Müller, Fisher discriminant analysis with kernels, Proc. *IEEE Int'l Workshop Neural Networks for Signal Processing IX*, pp. 41-48, Aug. 1999.
- [13] S. Mika, G. Rätsch, J. Weston, B. Schölkopf, A. Smola, and K.-R. Müller, Constructing descriptive and discriminative nonlinear features: Rayleigh coefficients in kernel feature spaces, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 25, no. 5, pp. 623-628, May 2003.
- [14] K.-R. Müller, S. Mika, G. Rätsch, K. Tsuda, and B. Schölkopf, An introduction to kernel-based learning algorithms, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 12, pp. 181–201, Mar. 2001.
- [15] V. Perlibakas, Face recognition using principal component analysis and wavelet packet decomposition, *Informatics*, Vol. 15 (2) (2004), 243-250.
- [16] I. Pima and M. Aladjem, Regularized discriminant analysis for face recognition, *Pattern Recognition*, Vol. 37(2004), 1945-1948.
- [17] S. J. Raudys and A. K. Jain, Small sample size effects in statistical pattern recognition: Recommendations for practitioners, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol.13 (1991), 252-264.
- [18] B. Schölkopf, C. Burges, and A. J. Smola, *Advances in Kernel Methods—Support Vector Learning*. Cambridge, MA: MIT Press, 1999.
- [19] D. L. Swets and J. Weng, Using discriminant eigenfeatures for image retrieval, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 18, no. 8, pp. 831-836, Aug. 1996.
- [20] M. Turk, A random walk through eigenspace, *IEICE Trans. Inform. Syst.*, Vol. E84-D, no. 12, pp. 1586-1695, Dec. 2001.
- [21] M. A. Turk and A. P. Pentland, Eigenfaces for recognition, *J. Cogn. Neurosci.*,

Vol. 3, no. 1, pp. 71-86, 1991.

- [22] J. Yang, A. F. Frangi, J. Y. Yang, D. Zhang, and Z. Jin, KPCA Plus LDA: A complete kernel fisher discriminant framework for feature extraction and recognition, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 27, no. 2, pp. 230-244, Feb. 2005.
- [23] J. Yang and J. Y. Yang, Why can LDA be performed in PCA transformed space? *Pattern Recognition*, Vol. 36, no. 2, pp. 563- 566, 2003.
- [24] J. Yang and J. Y. Yang, Optimal FLD algorithm for facial feature extraction, *Proc. SPIE Intelligent Robots and Computer Vision XX: Algorithms, Techniques, and Active Vision*, pp. 438-444, Oct. 2001.
- [25] J. P. Ye, R. Janardan, C. H. Park, H. Park, An optimization criterion for generalized discriminant analysis on under sampled problems, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 26 (8)(2004) 982-994.
- [26] H. Yu and J. Yang, A direct LDA algorithm for high-dimensional data-with application to face recognition, *Pattern Recognition*, Vol. 34, no. 10, pp. 2067-2070, 2001.
- [27] B. Zhang, H. Zhang, and S. Sam Ge, Face recognition by applying wavelet sub-band representation and kernel associative memory, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 15, No. 1(2004), 166-177.
- [28] W. Zhao, R. Chellappa, P. J. Phillips, et al., Face recognition: A literature survey, *ACM Comput. Surv.*, Vol. 35 (4) (2003), 399-459.
- [29] W. Zhao, A. Krishnaswamy, R. Chellappa, D. Swets, and J. Weng, Discriminant analysis of principal components for face recognition, *Face Recognition: From Theory to Applications*, H. Wechsler, P. J. Phillips, V. Bruce, F. F. Soulie and T. S. Huang, eds., pp. 73-85, Springer-Verlag, 1998.
- [30] X. S. Zhuang and D. Q. Dai, Inverse Fisher discriminate criteria for small sample size problem and its application to face recognition, *Pattern Recognition* (2005, accepted for publication).
- [31] 杜平, 徐大为, 刘重庆, 基于整体特征的人脸识别方法的研究, *红外与激光*

工程, 2003,32 (6), 509-604

- [32] 黄可坤, 小波包在人脸识别中的应用, *中山大学硕士论文*, 2005
- [33] 杨颖娴, 基于小波包的人脸识别算法, *中山大学硕士论文*, 2004

致谢

衷心感谢导师戴道清教授在我硕士研究生学习期间给予的精心指导和关心。戴老师不仅为我提供了优良的学习环境和实验条件，而且以严谨的治学态度和踏实的工作作风潜移默化的教导我做人、做事、做学问的道理。他的教诲不仅使我在学业上大有收获，并将永远激励我以后的工作和学习。

其次，我还要感谢我的父母多年来的培育和教导，并辛辛苦苦把我养育成人。感谢父母一直以来对我的支持与关爱，是他们的叮咛嘱咐让我明白做人的道理，是他们的默默关怀给我信心让我一如既往的追求着我的梦想。

还要感谢陪伴我度过的这几年的朋友、同学以及师兄、师姐、师弟、师妹们。感谢师兄黄可坤、陈家大，陈秋晓，林齐平热心给我提供临时住处，让我得以在读研究生前不用四处奔波；感谢师兄李科贤、黄可坤、杨关、张潮，师姐杨颖娴、毕秋霞，他们在我研究生两年的学习上，以及在论文的完成上给予莫大的帮助；还要感谢我的同门侯瑜佳、石玉、刘飞雷、张伟峰、以及阳文辉等，感谢他们和我一起度过两年的快乐学习生活。最后，感谢郑伟诗、刘志勇、何婧、林初仁、刘朝春等，与他们的交流让我受益匪浅。

很高兴能在中山大学进行攻读本科和硕士学位，感谢中山大学所有关心和帮助我的老师和同学。

论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期：二零零五年四月